第一講　順列と組み合わせ

（１）場合の数

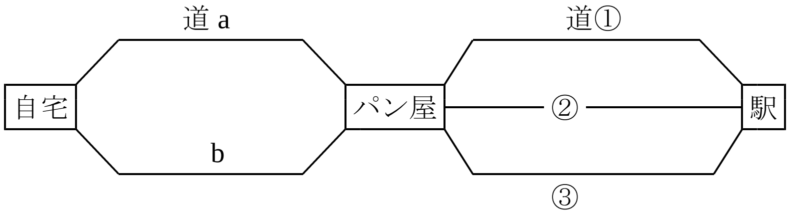
和の原則　‥‥‥　２つのことがら A,B について、A である場合が**ｍ通り**
B である場合が**ｎ通り**ある。A,B が同時には起こらないとき
A または B である場合の数は**ｍ＋ｎ通り**である。

A,B が同時には起こらないとき　という**条件**を集合論的表現にすると
事柄Ａが a_1， a_2， a_3,・・・a_mなるｍ通り
事柄Ｂが b_1， b_2， b_3,・・・b_nなるｎ通り
事柄Ａ，Ｂを***集合***という言葉に代えると次のようになる。
集合ＡはＡ＝｛a_1， a_2， a_3,・・・a_m｝
集合ＢはＢ＝｛b_1， b_2， b_3,・・・b_n｝で表される。
Ａ∩Ｂ＝Φ（ＡとＢは互いに素；null）ならば
$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ である。

（数学は条件を見逃すと、完全に誤りが生じる。）

積の原則　‥‥‥　２つのことがら A,B について、A である場合が**ｍ通り**あり、
そのどの場合についても B である場合が**ｎ通り**ある。
このとき A に続いて B である場合の数は**ｍ×ｎ通り**である。

例題１．自宅からパン屋に立ち寄り駅までいくのに何通りの行き方があるか？



計算と同時に***樹形図***　を使って書け。

例題２．(a + b)（ｐ＋ｑ＋ｒ）を展開すると何個の項の和になるか？

例題３．１から１０までの整数のうちで、２で割り切れるものは５個あり、
３で割り切れるものは３個ある。従って和の原則により２か３かの
いずれかで割り切れるものは５＋３＝８で８個あるという推論の
誤りを指摘せよ。

（２）順列（**Permutation**）

・**一般の順列**　‥‥‥（定義） n個の異なるものから r 個取り出して、
それを一列に並べるとき、その一つ一つの並べ方を、
n個のものから r 個とる順列という。
この順列の総数をn個のものから r 個とる順列の数といい
この数を${}_nP_r$で表す。
（読み方；ｴﾇ　ﾊﾟｰﾑｭﾃｰｼｮﾝ　ｱｰﾙ）

定理１： n個のものから r 個とる順列の数　${}_nP_r$ は

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$ である。

すなわち $${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

！の記号の読み方は階乗といい、（n！だったらnの階乗と読む）
意味は

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots\times 2\times 1$$

（例　$5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$）

例題４．１，２，３，４，５の５個の数字の中から４個の数字を選んで４桁の整数を作るとき、異なる整数がいくつできるか？

例題５．次の計算をせよ。

${}_6P_3$ ＝

${}_7P_4$ ＝

${}_5P_5$ ＝

例題６．１０人の生徒の並べ方の数はいくつあるか？

・円順列　　・・・・・　（定義）ｎ個の異なるものを円形に並べ、その並ぶ順序だけを問題にするとき、その一つ一つの並び方をｎ個のものの円順列という。

*定理２：*ｎ個のものの円順列の数は（ｎ－１）！である。

証明できる？

例題７．ａ，ｂ，ｃ，ｄの４人が手をつないで輪を作る仕方は、いくつあるか？

例題８．ｎ個の異なる珠で珠数を作る場合、その作り方は裏返して同じになるものがあることを考慮に入れて

$$\frac{(n-1)!}{2}$$ となる。

例題９．７個の異なる玉を糸で輪形につなぐとき、いくとおりの作り方があるか？

・同じものが含まれるときの順列

定理３：　ｎ個のもののうちで、ｐ個は同じもの、ｑ個は他の同じもの
ｒ個はまた他の同じもの、・・・・・、ｓ個はまた他の同じもの
であるときそれらｎ個のものを全部一列に並べる順列の数は

$$\frac{n!}{p!\cdot q!\cdot r!\cdot\cdots\cdots s!}$$ で求める。

例題 10．ａ，ａ，ａ，ｂ，ｃ，ｃの６個の文字を全部用いてできる順列の組合せは？

例題 11．１，１，１，２，２，３，３，の７個の数字を全部用いて、７桁の数がいくつできるか？

例題 12．$(a+b+c)^6$ を展開したときの　a^3bc^2　の係数はいくつか？

ﾋﾝﾄ：　一般に数の計算に関する問題を考えるときは、数を小さくして考え類推すれば比較的考えやすいことがある。この問題も $(a+b)^2$　で考えると

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$
この計算は各括弧（　）の中から一つずつ文字をとって掛け合わせることだから
すなわち文字の取り方であるので、たとえば a^2 はａａの並べ方だから
順列は１つ。ａｂの組合せは ab と ba の順列になり順列は２つ。b^2 は１つ。
従って $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$　とわかる。

・**重複順列**　‥‥‥　ｎ個のものから、同じ種類のものを繰り返しとることを許して、全部でｒ個取りだすときの順列を、ｎ種類のものからｒ個とる重複順列という。
この順列の総数を、ｎ種類のものからｒ個とる重複順列の数といい、この数を**ｎΠｒ**で表す。

$$n\Pi r = n^{r}$$

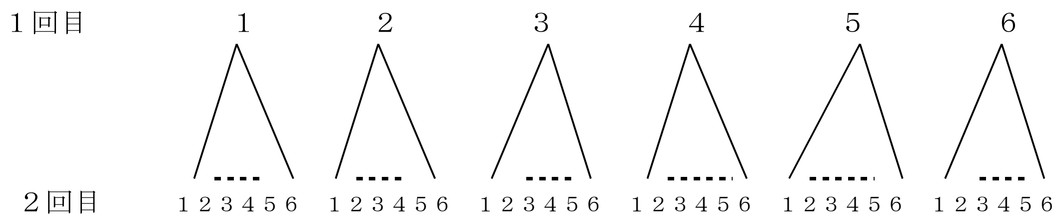
例題13.　１個のサイコロを３回なげるとき、目の出る順序にいくとおりの異なる出方があるか？

３ページのヒントのように数を小さくして考えましょう。

（１）サイコロを１回投げる。

１　２　３　４　５　６　の出方があるはず。６通り。

（２）サイコロを２回投げると、このとき樹形図を使うとわかりやすい。



１回目×２回目＝６×６＝３６回

これは言ってみれば、６種類の数字から同じ数を繰り返してでることを許して３回サイコロを投げて、その数の出方の順序だから、すなわち重複順列だから

１回なげた　　$6\Pi 1 = 6^{1} = 6$

２回なげた　　$6\Pi 2 = 6^{2} = 6\times 6 = 36$

では３、回投げた。？？？？？　Ｙｏｕ　understand ？

（３）組合せ（**Combination**）

・**一般の組合せ**　・・・・・（定義）ｎ個の異なるものからｒ個取りだして組を作るとき、
その一つ一つの組をｎ個のものからｒ個とる**組合せ**という。
この組合せの総数をｎ個のものからｒ個とる**組合せの数**といい、
${}_n\mathbf{C}_r$であらわす。（読み方；ｎコンビネーションｒと読む）

定理１． ｎ個のものからｒ個とる**組合せの数** ${}_n\mathbf{C}_r$ は

$$
{}_n\mathbf{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r\,!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r\,!}
$$

$$
= \frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}
$$

例題 14.　Ｕ＝｛ａ，ｂ，ｃ，ｄ，ｅ｝のとき、３個の元からなる部分集合を
樹形図を用いて全部書いて、その個数はいくつになるか？

例題 15.　次の計算をせよ。

${}_{15}\mathbf{C}_4 =$

${}_n\mathbf{C}_n =$

${}_n\mathbf{C}_{n-2} =$

・$_n C_r$ の基本的性質

定理２：

（ｉ）$_n C_r = {}_n C_{n-r}$

（ⅱ）$_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}$

それぞれ証明してみて

これを知らないと$_{15} C_{13}$を計算するとき、無駄な時間を過ごします。

$$_{15} C_{13} = \frac{15 \times 14 \times \cdots\cdots \times 3}{13 \times 12 \times \cdots\cdots \times 1}$$

知っていると

$$_{15} C_{13} = {}_{15} C_{15-13} = {}_{15} C_2 \quad \frac{15 \times 14}{2}$$

例題 16. 次の計算をせよ。

$_7 C_6 =$

$_{20} C_{17} =$

$_n C_{n-3} =$

例題 17. Ｕ＝｛ａ，ｂ，ｃ，ｄ｝のとき２個の元からなる部分集合はいくつあるか？
また、３個の元からなる部分集合の数は？

例題 18. 甲、乙を含む１５人のうちから５人の委員を選ぶのに、乙が選ばれ、甲が選ばれないしかたはいくつあるか？

例題 19. 凸ｎ角形の対角線の数を、組合せの考え方を用いて求めよ。

・**重複組合せ**　・・・・・・（定義）ｎ種類のものから、同じ種類のものを繰り返しとる
ことを許してｒ個取りだすときの組合せを、
ｎ種類のものからｒ個とる**重複組合せ**という。

この組合せの総数をｎ種類のものからｒ個とる重複組合せ
の数といい、

$_{n}H_{r}$　　であらわす。

（このときのＨは、Homogeneous　expression の頭文字をとってる）

定理３：ｎ種類のものからｒ個とる重複組合せの数 $_{n}H_{r}$ は

$_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{r}$　　である。

考え方：「４種類の数字１，２，３，４から、３個とる重複組合せ」･･･　命題 A
を考える。
いま、この４種類の中から個、取りだした組合せを、数字の小さい順に
整理したとする。

（１，２，３）（２，２，４）（３，３，３）・・・・・・

次に各々の組において左端の数字をそのままにしておいて
２番目の数に１を加え、３番目の数に２を加えると

（１，３，５）（２，３，６）（３，４，５）・・・・・

のようになる。その得られた組はみな違う数であり、
しかも、それぞれの組合せが

「６個の異なる数 1,2,3,4,5,6 から３個とる組合せ」・・・命題 B

になっている。

命題 B の組合せの個数と命題 A の組合せの数は等しいはずである
事より、$_{4}H_{3} = {}_{6}C_{3}$　　になっておりこれを拡張すると
$_{4}H_{3} = {}_{4+3-1}C_{3}$　すなわち　$_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{r}$　言える。

例題 20.　りんご、かき、みかんの３種類の果物がある。
５個の果物を買うには、幾通りの買い方があるか？

例題 21.　５個のリンゴを３人に分配する仕方の数は？