第二講　　確　率

（１）確率の意味

数学的確率　･･･ある試行の結果である「e_1、e_2，e_3，･･･・、e_n」においてこれらは、どの２つも重複して起こることなく、また、このうちのどの結果が起こることも同程度に期待されるとき
e_1、e_2，e_3，･･･・、e_n は**等確率の（根元）事象である**
ということにする。

定義：　Ｎ個の等確率の（根元）事象e_1、e_2，e_3，･･・、e_N
からなる**標本空間**　Ｓ＝｛e_1、e_2，e_3，･･･、e_N｝
（要素の数：Ｎ）
において、Ｓの部分集合の一つである事象Ａの要素の個数をａとするとき、事象Ａの起こる数学的確率Ｐ（Ａ）は、

$$P(A)=\frac{a}{N}$$

であるという。

（例）１個のサイコロの目の出方。
１つのｻｲｺﾛを振った場合、ｻｲｺﾛに特別の仕掛けでもない限り１の目から６の目が出ることは同程度に期待されるから、このときの標本空間Ｓは次のように書ける。
Ｓ＝｛１、２，３，･･･・、６｝*（要素の個数；６個）*

１の目が出るという事象Ａは　Ａ＝｛１｝で示され
またこのときの事象ＡはＳの部分集合Ａ⊂Ｓであるので
このときの確率Ｐ（Ａ）は

$$P(A)=\frac{1}{6}$$

で表される。

ｻｲｺﾛの５以上の目が出るという事象ＢはＢ＝｛５，６｝で示され、またこのときの事象ＢはＳの部分集合Ｂ⊂Ｓであるので事象Ｂの確率Ｐ（Ｂ）は

$$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

で表される。

統計的確率 ･･･いびつなｻｲｺﾛや、わん曲した硬貨では、等確率の事象からなる標本空間を考えることは困難であろう。

従ってこのとき、１の目が出る数学的確率や表が出る数学的確率は定義され得ないので、このようなときには、実験を繰り返し行い、たとえば硬貨を投げるときでいえば、表の出た回数ｒの実験回数ｎに対する割合 $\dfrac{r}{n}$ を調べ、次のような

統計的確率というものを定義する。

記； $\dfrac{r}{n}$ を相対度数という。

定義：ｎ回の試行の結果、事象Ａの起こる相対度数ｒ／ｎが ***ｎを限りなく大きくする***とき、ある***一定値ｐに限りなく近づく***ならば、このｐを事象Ａの起こる統計的確率という。

（例）１年間の世界各国の出生児数ｎに対する男児数ｒの相対度数ｒ／ｎは、どの年をとってみても、また、どの国についてもほとんど変わりなく

$$\frac{r}{n} \fallingdotseq 0.51$$

であることが、知られている。

この統計に基づいて、出生児が男児か女児かという観察において　$S = \{e_1、e_2\}$　ただし e_1 は男児
e_2 は女児

とおくとき男児が生まれる確率 $P(e_1) \fallingdotseq 0.51$
女児が生まれる確率 $P(e_2) \fallingdotseq 0.49$ というように
仮定推論する。

・標本空間 $S = \{e_1、e_2, e_3, \cdots、e_n\}$ において数学的確率においても、統計的確率においても次のことが言える。

（ｉ）各根元事象 e_j に対して、それぞれ p_j という負でない実数が対応する。

（ⅱ）$p_1, p_2, p_3, \cdots p_n$ 全体の和は１である

$$p_1 + p_2 + p_3 \cdots + p_n = 1$$

このような負でない実数 p_j を根元事象 e_j が起こる確率といい $p_j = P(e_j)$ と書く。

・ｻｲｺﾛのように、初めから数学的確率が分かっている場合についても、実際に実験を繰り返して統計的確率を求めようとする場合がある。このような場合は次の法則が成立している。

「数学的確率が初めから分かっている場合、実験回数を限りなく大きくすると、相対度数ｒ／ｎは数学的確率ｐに限りなく近づく。」これを大数の法則という。

（２）確率の計算

・確率の基本性質

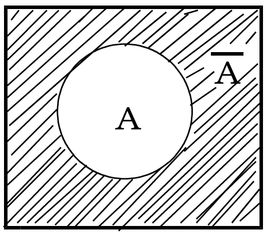
標本空間において

任意の事象Ｅに対し、０≦Ｐ（Ｅ）≦１

全事象は必ず起こり、Ｐ（Ｓ）＝１

空事象Φ（ﾌｧｲと読む）は決して起こらず、Ｐ（Φ）＝０

・余事象



標本空間Ｓにおいて、その部分集合として１つの事象Ａがあるとき、Ａに関する補集合$\overline{A}$ を考え、この$\overline{A}$をＡの余事象という。

定理：事象Ａの余事象を$\overline{A}$ とすれば余事象の確率Ｐ($\overline{A}$）は

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

（例）１個のｻｲｺﾛを振るとき奇数の目が出る事象を

Ａ＝｛１，３，５｝

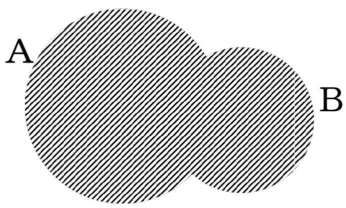
事象Ａの確率　Ｐ（Ａ）＝３／６＝０．５である時偶数の事象は、奇数事象の余事象であり、その確率は、Ｐ（$\overline{A}$）＝１－Ｐ（Ａ）＝１－０．５＝０．５で求めることが出来る。

・和事象・積事象

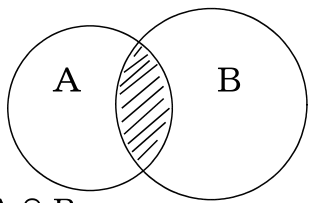
標本空間Ｓにおいて、２つの事象Ａ、Ｂに対し、

Ａ∪ＢをＡとＢの和事象といい、

Ａ∩ＢをＡとＢの積事象という。



Ａ∪Ｂ



Ａ∩Ｂ

和事象　Ａ∪Ｂ（Ａｶｯﾌﾟ Ｂと読む）は

Ａまたは Ｂのすくなくとも一方が起こるという事象を示す。

積事象　Ａ∩Ｂ（Ａﾐｰﾄ Ｂと読む）は

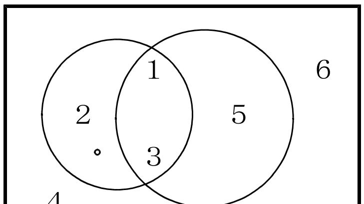
ＡとＢがともに起こるという事象を示す。

（例）１個のｻｲｺﾛを振るとき奇数の目が出る事象Ａは

Ａ＝｛１，３，５｝で表される。

同じく３以下の目が出る事象Ｂは

Ｂ＝｛１，２，３｝で表される。このとき



Ａ∪Ｂ＝｛１，２，３，５｝：これは５以下の奇数と３以下の数が出る目の事象を示す。

Ａ∩Ｂ＝｛１，３｝：　これは３以下の奇数が出る目の事象を示す。

・排反事象

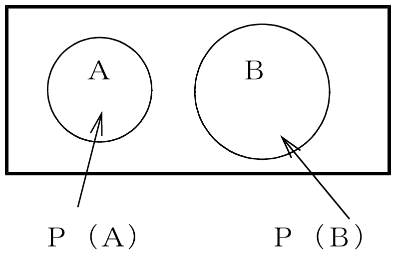
Ａ∩Ｂ＝Φ（空集合）のとき、すなわちＡ、Ｂが同時には
起こりえないとき、ＡとＢとは互いに排反である、または排反事
象であるという。Ｐ(Ａ∩Ｂ)＝Ｐ（Φ）となり、次の定理を得る。

定理：Ａ、Ｂが互いに排反であるならば

Ｐ（Ａ∪Ｂ）＝Ｐ（Ａ）＋Ｐ（Ｂ）　が成立する。

コメント：**集合論のベン図**を使用すると

(1) Ａ、Ｂが互いに排反（Ａ∩Ｂ＝Φ）

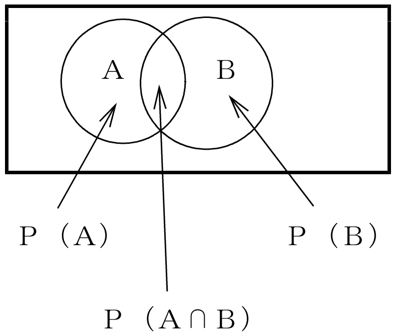


Ｐ（Ａ∪Ｂ）＝Ｐ（Ａ）＋Ｐ（Ｂ）－Ｐ（Ａ∩Ｂ）

すなわちＰ(Ａ∩Ｂ)＝Ｐ（Φ）であるので

Ｐ（Ａ∪Ｂ）＝Ｐ（Ａ）＋Ｐ（Ｂ）が成り立つ。

（２）Ａ，Ｂが排反でないとき（Ａ∩Ｂ≠Φ）



Ｐ（Ａ∪Ｂ）＝Ｐ（Ａ）＋Ｐ（Ｂ）－Ｐ（Ａ∩Ｂ）

Ｐ（Ａ∩Ｂ）＝Ｐ（Ａ）＋Ｐ（Ｂ）－Ｐ（Ａ∪Ｂ）

（例）１個のｻｲｺﾛを振るとき、１の目が出る確率と、
偶数の目が出る確率は、お互い排反であるので
１の目が出るか、偶数の目が出るか、どちらでもよい
確率は

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

１の目が出る確率　　　　　偶数の目が出る確率

・条件付き確率

標本空間Ｓにおいて２つの事象Ａ、Ｂがあるとき
事象Ａが起こったことを前提とした場合の、事象Ｂが起こる
確率を$P_A(B)$で表す。この$P_A(B)$のことを**条件付き確率**という。

定理：$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

（例）１０本のうち３本の当たりくじが、入っている。
Ａさん、Ｂさん順番にくじをひくとき
Ａさん、Ｂさんともに当たりくじを引く確率を求める。

（解）
最初Ａさんが、くじをひき、そのときの当たる確率
は　　Ｐ（Ａ）＝３／１０
つぎに
Ｂさんが当たりくじを引く確率は
（Ａさんがすでに１つの当たりくじをひいており、
その分なくなっているので）
Ｐ（Ｂ）＝２／９
すなわち

$$P_A(B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

・独立事象と従属事象

２つの事象Ａ，Ｂについて
- Ａが起こったとした場合のＢの起こる確率$P_A(B)$
- 単にＢが起こる確率$P(B)$

は一般的には一致しない。
もしＡの起こることがＢの起こる確率に何の影響も与えずに$P_A(B) = P(B)$が成立するならば乗法定理から
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$が得られる。

定義：２つの事象Ａ、Ｂにおいて

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

が成り立つとき、ＡとＢとは独立（独立事象）であるという。ＡとＢとが独立でないとき、これらは従属（従属事象）であるという。

（例）２つのｻｲｺﾛａ，ｂを同時に振る場合、２つの事象
Ａ，Ｂ（Ａ：ａに１の目が出る）（Ｂ：ｂに１の目が出る）は互いに独立であるからａ，ｂともに１の目が出る確率は
Ｐ（Ａ∩Ｂ）＝Ｐ（Ａ）・Ｐ（Ｂ）＝ 1/6 × 1/6 ＝ 1/36
になる。

・**重複試行**

１個のｻｲｺﾛを３回振ったとき

「１の目が２回出る」という確率Ｐ（Ａ）を検討する。

	１回目	２回目	３回目
組合せ１	○	○	×
組合せ２	○	×	○
組合せ３	×	○	○

命題による目の出方の組合せの数は $_3C_2$ で示される。

すなわち $_3C_2 = \dfrac{3 \times 2}{2} = 3$ 通り

これらは、どの組合せにおいても１の目が２回とそれ以外の目が
１回出るわけで、各回の目の出方が独立であることを考えて
独立事象の乗法定理を用いると

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{216}$$

これら $_3C_2$ 通りの事象はお互いに排反であるので
求める確率Ｐ（Ａ）は

$$P(A) = {}_3C_2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1$$

$$= \frac{15}{216} = 0.07$$ と求める事が出来る。

定理：

毎回の試行で、事象Ａの起こる確率が一定値ｐならば
ｎ解の試行のうちＡが丁度ｒ回起こる確率は

$$p_r = {}_nC_r \cdot p^r \cdot q^{n-r} \quad (q = 1 - p)$$

重複試行の確率

（練習）４枚のコインを投げて丁度２枚のコインが表になる確率ｐ１と
６枚のコインを投げて丁度３枚のコインが表になる確率ｐ２を求め比較せよ。

・期待値

定義：

変数Xがｎ個の値 x_1， x_2， x_3，・・・、x_nのいずれかをとり、これらの値をとる確率がそれぞれ p_1， p_2， p_3，・・・、p_nであるとき

$$m = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots\cdots + x_n \cdot p_n$$

をXの**期待値**（平均値）という。

とくに**Xが金額**のときには**期待金額**ともいう。

（例）１つのサイコロを振るとき、出る目の数の期待値ｍは、
１から６までのどの目も出る確率は１／６であるので

$$m = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}$$

＝３．５ になる。

（練習）１つのサイコロを振って、１の目が出たら１０００円、
２か３の数が出たら７００円、４か５か６の目が出たら５００円もらえるとすれば、このときの期待金額はいくらになるか求めよ。